Point fixe lié à une orbite périodique d'un difféomorphisme de R2

Boris Kolev

POINT FIXE LIÉ À UNE ORBITE PÉRIODIQUE D'UN DIFFÉOMORPHISME DU PLAN

BORIS KOLEV

Résumé. Étant donné un difféomorphisme C^1 de $\mathbb{R}^2$ qui possède une orbite périodique, on montre comment la théorie du point fixe de Nielsen peut être utilisée pour établir directement l'existence d'un point fixe lié à cette orbite périodique.

1. Introduction

Soient f un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{O} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ une orbite périodique de f, de période n. Supposons que f possède un point fixe P_0. On dit que P_0 *n'est pas lié* à l'orbite périodique $\mathcal{O}$ s'il existe une courbe de Jordan $\mathcal{C}$, bordant un disque D, telle que :

(1) $\mathcal{O} \subset \mathrm{Int}(D)$,

(2) $P_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus D$,

(3) $f(\mathcal{C})$ est isotope à $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$.

Dans le cas contraire, on dit que P_0 est *lié* à $\mathcal{O}$.

Exemple. Le point fixe d'une rotation d'angle $2k\pi/n$ est lié à n'importe quelle orbite périodique de cette rotation.

Un des corollaires du théorème de translation plane de Brouwer énonce que tout homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$, qui préserve l'orientation et possède une orbite périodique, a un point fixe ([3, 4]). En utilisant ce résultat et les travaux de Thurston sur la classification des difféomorphismes des surfaces, J.-M. Gambaudo a montré, dans un article récent [5] que tout difféomorphisme C^1 du disque qui préserve l'orientation et possède une orbite périodique, possède également un point fixe *lié* à cette orbite périodique.

Il nous est apparu que ce résultat était une conséquence directe de la théorie du point fixe de Nielsen. C'est ce que nous proposons de développer ici. Plus précisément, nous montrons le résultat suivant :

Date: 2 avril 1990.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 55M20 ; 57N05 ; 58C30 ; 58F20.

Key words and phrases. Dynamics of surfaces homeomorphisms ; Nielsen theory.

Je remercie Jean-Marc Gambaudo pour son aide et ses encouragements précieux durant la préparation de ce travail.

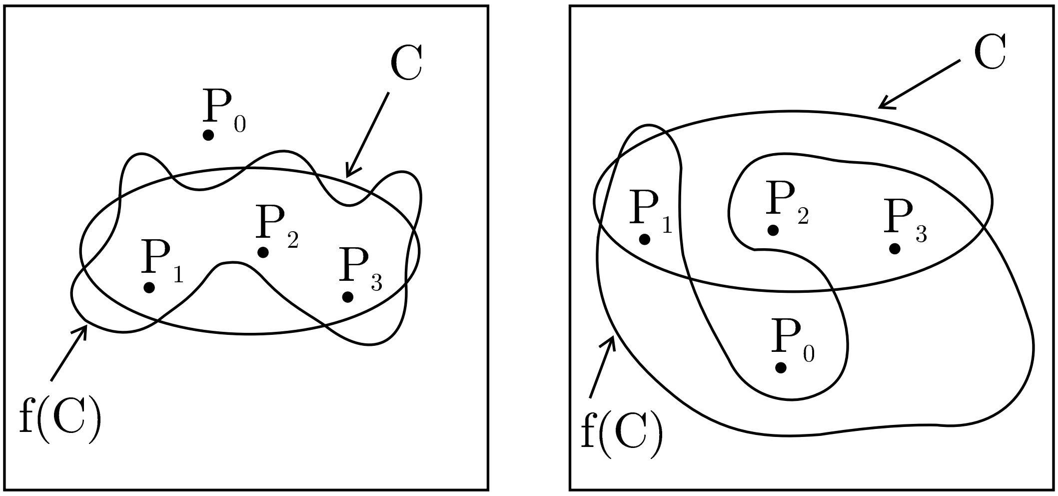

Fig. 1 – A gauche, $\mathcal{C}$ et $f(\mathcal{C})$ sont isotopes dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$, à droite, elles ne le sont pas.

Théorème 1.1. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un difféomorphisme C^1 préservant l'orientation. Si f possède une orbite périodique $\mathcal{O}$, alors f possède un point fixe lié à $\mathcal{O}$.*

Remarque. L'hypothèse de différentiabilité est simplement technique et n'intervient qu'au voisinage des points de l'orbite périodique de f. Une démonstration semblable devrait être valable sans cette hypothèse, *voir* [4, p. 320].

2. Classes de Nielsen

Nous résumons les éléments de la théorie dont nous avons besoin et que l'on peut trouver dans [6] et [7].

Soient M une surface compacte et $\pi : \overline{M} \to M$ son revêtement universel. Considérons un homéomorphisme $\tau : M \to M$. Deux points fixes de τ, P_0 et P_1 sont *Nielsen-équivalents* s'il existe un relèvement t de τ fixant à la fois un point $\overline{P}_0 \in \pi^{-1}(P_0)$ et un point $\overline{P}_1 \in \pi^{-1}(P_1)$ ou, de façon équivalente, s'il existe un arc c joignant P_0 à P_1 et homotope à l'arc $\tau(c)$ relativement à P_0, P_1. Les classes d'équivalence pour cette relation sont les *classes de Nielsen* de τ. Chaque classe de Nielsen est un sous-ensemble isolé de $Fix(\tau) = \{P \in M; \tau(P) = P\}$, on peut donc définir son indice, qui est un entier relatif, et il existe seulement un nombre fini de classes ayant un indice non nul. Ce sont les classes essentielles ; leur nombre $N(\tau)$, appelé nombre de Nielsen de τ, est un invariant d'homotopie, de sorte que toute application homotope à τ possède au moins $N(\tau)$ points fixes. En désignant ces classes par

$F_1, F_2, \ldots, F_N$ et par $j_1, j_2, \ldots, j_N$ leur indice respectif, on a la relation :

$$\sum_{k=1}^{N} j_k = L(\tau) \tag{2.1}$$

où

$$L(\tau) = \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \operatorname{tr}(\tau_{*i} : H_i(M;\mathbb{Q}) \to H_i(M;\mathbb{Q}))$$

est le nombre de Lefschetz de τ.

Dans le cas où $\chi(M) < 0$ ($\chi(M)$ étant la caractéristique d'Euler de M) et τ un homéomorphisme qui préserve 1'orientation, Nielsen a montré que $j_k \leq 1$ ($k = 1, \ldots, N$), voir [7, pp. 17-19], et c'est là le résultat essentiel dont nous aurons besoin par la suite.

3. Preuve du théorème

Pour commencer, nous identifions $\mathbb{R}^2$ au complémentaire du pôle Nord P_∞ de la sphère unité S^2 grâce à la projection stéréographique. f s'étend alors en un homéomorphisme $\hat{f}$ de S^2 qui fixe P_∞.

Soient $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ l'ensemble des points de l'orbite périodique $\mathcal{O}$ de f et M la surface obtenue en compactifiant $S^2 \setminus \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ de la façon suivante. On remplace chaque P_i ($i = 1, \ldots, n$) par un cercle S_i, le cercle des vecteurs unitaires tangents en ce point. $\hat{f}$ étant de classe C^1 au voisinage des points $P_1, P_2, \ldots, P_n$, la restriction de $\hat{f}$ à $S^2 \setminus \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ induit un homéomorphisme $\tau : M \to M$ qui coïncide avec $\hat{f}_{/S^2\setminus\{P_1,P_2,\ldots,P_n\}}$ en dehors du bord de M (*voir* [2]).

Remarquons que $\hat{f}$ et τ ont les mêmes points fixes et que les points fixes de $\hat{f}$, en dehors de P_∞, sont exactement les points fixes de f.

Lemme 3.1. *Soit P_0 un point fixe de f non lié à $\mathcal{O}$. Alors P_0 et P_∞ sont dans la même classe de Nielsen de τ.*

Démonstration. P_0 n'étant pas lié à $\mathcal{O}$, il existe une courbe de Jordan $\mathcal{C}$ dans S^2, séparant $\{P_0, P_\infty\}$ de $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ et telle que $\hat{f}(\mathcal{C})$ soit isotope à $\mathcal{C}$ dans $S^2 \setminus \{P_0, P_\infty, P_1, P_2, \ldots, P_n\}$.

Cette courbe de Jordan borde, dans M, un disque Δ qui contient P_0 et P_∞. De même $\mathcal{C}' = \tau(\mathcal{C})$ borde un disque $\Delta' = \tau(\Delta)$ qui contient $\tau(P_0) = P_0$ et $\tau(P_\infty) = P_\infty$.

$\mathcal{C}$ se relève donc dans $\overline{M}$, le revêtement universel de M, en une courbe fermée $\overline{\mathcal{C}}$ bordant un disque $\overline{\Delta}$ tel que $\pi(\overline{\Delta}) = \Delta$. Par ailleurs, une isotopie $\mathcal{C}_s$ ($s \in [0,1]$) entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ se relève en une isotopie $\overline{\mathcal{C}}_s$ entre $\overline{\mathcal{C}}$ et un relèvement $\overline{\mathcal{C}}'$ de $\mathcal{C}'$ bordant un disque $\overline{\Delta}'$ tel que $\pi\,(\overline{\Delta}') = \Delta'$.

Soit t l'unique relèvement de τ tel que $t(\Delta) = \overline{\Delta}'$. $\overline{\Delta}$ (resp. $\overline{\Delta}'$) contient un unique point $\overline{P}_\infty \in \pi^{-1}(P_\infty)$ [resp. $\overline{P}'_\infty \in \pi^{-1}(P_\infty)$] et l'on a, par construction, $t(\overline{P}_\infty) = \overline{P}'_\infty$. Or $\overline{P}_\infty \in \overline{\Delta}'$: sinon il existerait

$s \in [0,1]$ tel que $\overline{P}_\infty \in \overline{\mathcal{C}}_s$, ce qui est exclu puisque l'isotopie $\mathcal{C}_s$ évite P_∞ par hypothèse. Donc $\overline{P}'_\infty = \overline{P}_\infty = t(\overline{P}_\infty)$.

Le même argument valant pour $\overline{P}_0 = \pi^{-1}(P_0) \cap \overline{\Delta}$, il en résulte que $t(\overline{P}_0) = \overline{P}_0$. Donc P_0 et P_∞ sont dans la même classe de Nielsen de τ. □

Lemme 3.2. *$N(\tau) \geq 2$.*

Démonstration. Remarquons que $L(\tau) = 1 - \mathrm{tr}(\tau_{*1}) = 2$. Ceci étant, nous distinguons deux cas suivant que la période n de $\mathcal{O}$ est égale ou strictement supérieure à 2.

Si $n = 2$, M est un anneau dont τ permute les bords. En considérant un revêtement à deux feuillets, on peut montrer par un argument classique, *voir* [3] et [4], que τ possède exactement deux classes de Nielsen, chacune ayant un indice égal à 1.

Si $n \geq 3$, $\chi(M) < 0$ et d'après la remarque faite à la fin du paragraphe précédent et la relation (2.1), on a nécessairement $N(\tau) \geq 2$. □

Preuve du Théorème 1.1. D'après le lemme 3.2, τ possède au moins deux points fixes dont un au moins n'est pas dans la même classe que P_∞. Il résulte alors du lemme 3.1 que ce point est un point fixe de f lié à $\mathcal{O}$. □

Références

[1] M. Bonino, *Nielsen theory and linked periodic orbits of homeomorphisms of* $\mathbb{S}^2$, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **140** (2006), 425–430.

[2] R. Bowen, *Entropy and the fundamental group*, The Structure of Attractors in Dynamical Systems (Proc. Conf., North Dakota State Univ., Fargo, N.d., 1977), Lecture Notes in Math., vol. 668, Springer, Berlin, 1978, pp. 21–29. MR 80d :58049

[3] P. Boyland, *Notes on dynamics of surface homeomorphisms : lectures by p. boyland and j. franks*, 1989, notes by C. Carroll, J. Guaschi and T. Hall, August 1989, Warwick, pp. 1–48.

[4] Albert Fathi, *An orbit closing proof of Brouwer's lemma on translation arcs*, Enseign. Math. (2) **33** (1987), 315–322. MR MR925994 (89d :55004)

[5] J.-M. Gambaudo, *Periodic orbits and fixed points of a C^1 orientation-preserving embedding of D^2*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **108** (1990), 307–310. MR MR1074717 (91h :57008)

[6] B. J. Jiang, *Lectures on Nielsen fixed point theory*, Contemporary Mathematics, vol. 14, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1983, ISBN 0-8218-5014-8. MR MR685755 (84f :55002)

[7] J. Nielsen, *Surface transformation classes of algebraically finite type*, Danske Vid. Selsk. Math.-Phys. Medd. **21** (1944), 89. MR MR0015791 (7,469c)

CMI, 39, rue F. Joliot-Curie, 13453 Marseille cedex 13, France
E-mail address: kolev@cmi.univ-mrs.fr